Adrian Zanoschi
Gheorghe Iurea
Gabriel Popa
Petru Răducanu
Ioan Șerdean

Bacalaureat 2026

MATEMATICĂ

M_mate-info

_ Teme recapitulative
_ 65 de teste rezolvate, după modelul M.E.
_ Breviar teoretic

Editura Paralela 45

Cuprins

Clasa a XII-a

Teme recapitulative

Clasa a IX-a

1.1. Mulțimi și elemente de logică matematică

1. Se consideră intervalele $A = (-4, 4]$ și $B = (-2, 7)$. Determinați $(A \cap B) \cap \mathbb{Z}$.

2. Ordonați crescător numerele $a = 2{,}5(1)$, $b = \frac{5}{2}$, $c = 2{,}(51)$ și $d = 2{,}51$.

3. Arătați că numărul $a = \left(\sqrt{168} + 4\sqrt{\frac{21}{2}} - 6\sqrt{\frac{14}{3}}\right)\left(\sqrt{4\frac{2}{3}}\right)^{-1}$ este natural.

4. Arătați că numărul $b = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{9}}$ este natural.

5. Se consideră numerele $a = \sqrt{98} - \sqrt{32} - \sqrt{8}$ și $b = \sqrt{162} + \sqrt{18} + \sqrt{72}$. Calculați media aritmetică și media geometrică ale numerelor a și b.

6. Determinați numerele raționale a și b, știind că $\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)^2 = a - b\sqrt{3}$.

7. Demonstrați că, dacă $x \in [0, 51]$, atunci numărul $a = \sqrt{x + 49} + \sqrt{x + 625}$ se află în intervalul $[32, 36]$.

8. Fie $E(x, y) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{y^2 + 6y + 10}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$. Arătați că $E(x, y) \geq 3$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

9. Stabiliți câte numere iraționale conține mulțimea $\left\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{199}, \sqrt{200}\right\}$.

10. Calculați:

a) $\left[\frac{5}{3}\right] + \left[-\frac{5}{2}\right]$;

b) $\{1{,}64\} - \{-2{,}36\}$;

c) $\left[\sqrt{2}\right] + \left[\sqrt{3}\right] + \left[\sqrt{2} + \sqrt{3}\right]$;

d) $\left\{\sqrt{2}\right\} + \left\{\sqrt{3}\right\} - \left\{\sqrt{2} + \sqrt{3}\right\}$.

11. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $|x - 2| = 5$;
b) $|x - 1| + |2 - 2x| = 12$;
c) $|1 - 2x| = |x + 4|$;
d) $|x^2 - 1| + |x + 1| = 0$.

12. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

a) $|1 - 2x| \leq 3$;
b) $|x + 3| \geq 4$.

13. Determinați numărul elementelor mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |2x + 1| \leq 100\}$.

14. Arătați că valoarea expresiei $E(x) = |4x - 8| - 2|4 - 2x|$ nu depinde de numărul real x.

15. Demonstrați că $|2x - 3| + 2|x - 1| \geq 1$, pentru orice număr real x.

16. Demonstrați că $x^2 + 3x + 3 > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

17. Fie $E(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$, unde $x \in \mathbb{R}$. Demonstrați că:

a) $E(x) = (x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$;

b) $E(x) > \frac{3}{4}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

18. Demonstrați că, dacă $x, y \in [2, \infty)$, atunci $xy - 2x - 2y + 6 \in [2, \infty)$.

19. Demonstrați, prin inducție, că următoarele egalități sunt adevărate pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$;

b) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$.

20. Demonstrați, prin inducție, că următoarele inegalități sunt adevărate pentru orice număr natural n care îndeplinește condiția indicată:

a) $2^n > 2n + 1$, $n \geq 3$;

b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $n \geq 1$.

21. Demonstrați că numărul $13^n + 7^n - 2$ se divide cu 6, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

22. Aflați câte numere naturale de trei cifre au suma cifrelor egală cu 25.

23. Stabiliți câte numere naturale de patru cifre se pot forma utilizând cifrele 0, 1, 2, 3.

24. Stabiliți câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma utilizând cifrele 1, 2, 3, 4, 5.

25. Aflați câte numere de trei cifre au exact două cifre egale.

26. Aflați câte numere naturale de trei cifre au produsul cifrelor egal cu 0.

27. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Aflați câte perechi $(a, b) \in A \times A$ au proprietatea că produsul $a \cdot b$ este impar.

1.6. Trigonometrie

1. Calculați: a) $\sin\frac{5\pi}{6}$; b) $\cos\frac{7\pi}{4}$; c) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}$; d) $\cos\frac{7\pi}{6}$.

2. Calculați: a) $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$; b) $\cos\frac{117\pi}{4}$; c) $\operatorname{tg}\frac{53\pi}{3}$; d) $\operatorname{ctg}\left(\frac{1007\pi}{6}\right)$.

3. Aflați $\cos a$, $\sin b$, $\sin(a+b)$ și $\cos(a-b)$, știind că $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $b \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, $\sin a = \frac{3}{5}$ și $\cos b = \frac{12}{13}$.

4. Dacă $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și $\cos a = -\frac{5}{13}$, calculați $\sin a$, $\sin 2a$ și $\cos 2a$.

5. Fie $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și $\cos 2x = -\frac{1}{2}$. Se cer $\cos x$ și $\sin x$.

6. Dacă $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\sin x = \frac{1}{4}$, se cere $\sin 3x$.

7. Fie $x \in \mathbb{R}$, astfel încât $\operatorname{ctg} x = 6$. Calculați $\sin^2 x$.

8. Dacă $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t = 2$, calculați $\sin 2t$.

9. Fie t și $\alpha \in \mathbb{R}$, astfel încât $\sin\alpha + t\cos\alpha = 1$.

a) Dacă $t = 1$, calculați $\operatorname{tg} 2\alpha$.
b) Dacă $t = -1$, calculați $\sin 2\alpha$.

10. Calculați $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, știind că $\sin a = \frac{4}{5}$ și $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

11. Calculați: a) $\sin\frac{\pi}{12}$; b) $\cos 75°$; c) $\operatorname{tg} 15°$; d) $\cos\frac{11\pi}{12}$.

12. Calculați $\frac{\sin 75°}{\sin 15°} - \frac{\cos 75°}{\cos 15°}$.

13. Fie $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, astfel încât $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$. Calculați $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(\pi - \alpha)$.

14. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a - b = \pi$. Arătați că are loc relația $\cos a \cdot \cos b \le 0$.

15. Se consideră $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $\sin a + \sin b = 1$ și $\cos a + \cos b = \frac{1}{2}$. Calculați $\cos(a-b)$.

30. Verificați egalitatea $\cos^2 20^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 80^\circ = \frac{3}{2}$.

31. Demonstrați că $\sin^2 2x - \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

32. Fie $x \in \mathbb{R}$, astfel încât $\operatorname{tg} x = \frac{2}{3}$. Calculați $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

33. Determinați $x \in [0, 3\pi)$ pentru care:

a) $\sin x = \frac{1}{2}$; b) $\cos 2x = -\frac{1}{2}$.

34. Determinați $x \in [0, 2\pi)$ pentru care $\operatorname{tg} x = \sin x$.

35. Stabiliți dacă următoarele funcții sunt pare sau impare:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x - x \cos x$; b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin 4x \cdot \cos 3x$.

36. Arătați că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x \cdot \cos x$, este periodică, având perioada $T = \pi$.

37. Determinați imaginile funcțiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin:

a) $f(x) = 3 \sin x - 2$; b) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$; c) $f(x) = \sin x + \cos x$.

38. Demonstrați că:

a) $\cos 1 > \cos 2$; b) $\sin 2 > \cos 2$; c) $\sin 1 > \cos 1$.

1.7. Aplicații ale trigonometriei în geometrie

1. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu catetele $AB = 3$, $AC = 4$. Calculați:

a) lungimea ipotenuzei BC; b) aria triunghiului;
c) cosinusul unghiului B; d) lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei;
e) raza cercului circumscris triunghiului.

2. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = AC = 5$ și $BC = 6$. Calculați distanța de la centrul de greutate al triunghiului la dreapta BC.

3. Calculați perimetrul triunghiului ABC, în care $AB = 4$, $AC = 3$, iar $\sphericalangle BAC = 60^\circ$.

4. În triunghiul ABC, avem $AB = 3$, $AC = 5$, iar $BC = 7$. Calculați $\cos A$.

5. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 5$, $AC = 6$ și $BC = 8$. Arătați că triunghiul are un unghi obtuz.

6. Demonstrați că în orice triunghi ABC are loc identitatea $b \cos C + c \cos B = a$.

Clasa a X-a

2.1. Radicali și logaritmi

1. Arătați că:

a) $2\sqrt{14}-\sqrt{\frac{7}{2}}-5\sqrt{\frac{8}{7}}=\frac{1}{\sqrt{14}}$; b) $\sqrt{3}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}=3$;

c) $\sqrt{6+\sqrt{8}+\sqrt{12}+\sqrt{24}}=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

2. Se consideră numerele $a=\sqrt{3-\sqrt{3}}$ și $b=\sqrt{3+\sqrt{3}}$. Arătați că $\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\in\mathbb{Q}$.

3. Arătați că numărul $a=\sqrt{17+12\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{6+4\sqrt{2}}\in\mathbb{Q}$.

4. Calculați $\left[\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right]$ ($[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x).

5. Aduceți la o formă mai simplă:

a) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}-\sqrt{2}$; b) $\sqrt{6}\cdot\sqrt[3]{18}:\sqrt[6]{\frac{3}{2}}$;

c) $\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}$; d) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{3\sqrt[3]{3}}\cdot\sqrt[3]{9\sqrt{3}}$.

6. a) Aduceți la forma cea mai simplă: $E(x,y)=\sqrt[4]{\frac{x\sqrt[3]{y}}{y^2\sqrt{x}}}:\left(\frac{\sqrt[12]{y}}{\sqrt[8]{x}}\right)^7$, unde $x, y\in(0,+\infty)$.

b) Arătați că numărul $a=\sqrt[3]{\frac{4\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[9]{16}}{3\sqrt[12]{3}}}$ este rațional.

7. Se consideră $E(x)=x\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}$, unde $x\geq 0$. Calculați $E(a)$, unde $a=\sqrt[11]{8}$.

8. a) Fie $a=\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\sqrt[16]{2}$ și $b=\sqrt[16]{2}$. Arătați că $a\cdot b$ este număr rațional.

b) Arătați că numărul $a=\sqrt{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-1}\cdot\sqrt[6]{7-3\sqrt{5}}\in\mathbb{Q}$.

9. Determinați numărul natural k, dacă $(\sqrt[5]{x^3})^{7-k}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^k=x$, pentru orice $x>0$.

10. Ordonați crescător numerele:

a) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$ și $\sqrt[4]{5}$; b) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$, $\sqrt[4]{27\sqrt{3}}$ și $\sqrt[3]{4}$.

11. Comparați numerele:

a) $a=\sqrt{2}+\sqrt{7}$ și $b=\sqrt{3}+\sqrt{6}$; b) $a=\sqrt{13}-\sqrt{12}$ și $b=\sqrt{12}-\sqrt{11}$.

12. Comparați numerele $a=\sqrt{1+\sqrt{2}}$ și $b=\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$

13. Calculați:

a) $\log_2 8\sqrt{2}$; b) $\log_2 0{,}125$; c) $\log_{\sqrt{2}} 4\sqrt[3]{2}$; d) $\log_2 \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$;

e) $4^{1-\log_2 \sqrt{8}}$.

14. Ordonați crescător numerele $a=-\sqrt[3]{64}$, $b=\log_3 \dfrac{1}{27}$ și $c=\log_2 \dfrac{1}{32}$.

15. a) Arătați că numărul $a=\log_4 8+\log_9 27-\sqrt[3]{8}$ este natural.

b) Demonstrați că numărul $b=\log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3}+\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 4$ este întreg.

16. Calculați:

a) $\log_2\left(6+\sqrt{8}\right)+\log_2\left(6-\sqrt{8}\right)-\log_2 7$; b) $\lg 0{,}01+2^{\log_2 3}-9^{\log_3 5}$;

c) $\log_2 3\cdot\log_3 5\cdot\log_5 8$; d) $\dfrac{\log_3 5\cdot\log_7 11}{\log_7 5\cdot\log_3 11}$.

17. Calculați:

a) $\log_2 8\cdot\log_3 9\cdot\log_5 \sqrt{5}$; b) $\log_2 8\sqrt{2}-\log_3 3\sqrt{3}$.

18. Aduceți la o formă mai simplă:

a) $\log_{\sqrt{3}} 9+\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 3$; b) $\dfrac{1}{\log_3 2}+\dfrac{2}{\log_9 4}-\dfrac{3}{\log_{27} 8}$;

c) $\log_{11} 3\cdot\log_7 5-\log_7 3\cdot\log_{11} 5$.

19. Arătați că numărul a este rațional, unde:

a) $a=\log_{25}100\cdot\log_{16}25-2\log_{16}5$; b) $a=\dfrac{\log_2 24}{\log_{96} 2}-\dfrac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$;

c) $a=\log_2 9+\dfrac{\log_2 12}{\log_3 2}-\dfrac{\log_2 6}{\log_{24} 2}$.

20. Arătați că numărul $a=\log_{\sqrt{3}}\dfrac{9}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{3}{5+2\sqrt{6}}$ este natural.

21. Care număr este mai mare?

a) $\log_3 5$ sau $\log_3 4$; b) $\log_2 3$ sau 2; c) $\log_{0,3} 2$ sau $\log_{0,3} 3$;

d) $\log_{\frac{1}{3}} 4$ sau -1; e) $\log_3 5$ sau $\log_4 5$.

2.5. Combinatorică

1. Care este cel mai mic număr natural n pentru care $n! > 1000$?

2. a) Arătați că $\dfrac{1}{k!}-\dfrac{1}{(k+1)!}=\dfrac{k}{(k+1)!}$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$.

b) Calculați suma $S=\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+...+\dfrac{99}{100!}$ și arătați că $S<1$.

3. Calculați: a) $\dfrac{C_{20}^{10}}{C_{20}^{9}}$; b) $A_5^3-6C_5^3$; c) $A_4^3-A_3^2-C_4^2$.

4. Calculați:

a) $\dfrac{n!+(n+1)!}{(n+1)!-n!}$, $n \in \mathbb{N}$; b) $\dfrac{A_n^6+A_n^5}{A_n^4}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 6$; c) $\dfrac{C_n^3}{C_n^3+C_n^4}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 4$.

5. Care este cel mai mare element din mulțimea $A=\{C_7^3, C_7^5, C_7^6\}$?

6. Demonstrați că:

a) $C_{2n}^n = 2C_{2n-1}^n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$; b) $C_{n+1}^4 = C_n^4 + C_n^3$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 4$.

7. Rezolvați ecuațiile: a) $C_x^2 + A_x^2 = 30$; b) $C_{2x-3}^2 = 3$;

c) $A_x^5 - 3A_x^4 = 21A_x^3$; d) $6\cdot C_x^1 + 6\cdot C_{x+2}^3 = 13C_{x+1}^2$; e) $A_{x-2}^2 + C_x^2 = 41$.

8. Rezolvați inecuațiile:

a) $C_x^{x-1} + C_{x-1}^{x-3} \le 9$; b) $(x+1)! - x! \le 100$; c) $C_n^3 \ge C_n^5$;

d) $C_7^k \ge C_7^{k-1}$; e) $A_{x-1}^5 \le 12A_{x-1}^3$.

***

9. În câte moduri se poate forma un tren, având la dispoziție 6 vagoane?

10. Câte numere de zece cifre distincte încep cu 20 și se termină cu 14?

11. În câte moduri putem împărți 5 cărți la trei copii?

12. Dăm 3 cărți diferite la 5 copii, astfel încât niciun copil să nu primească mai mult de o carte. În câte moduri se poate face împărțirea?

13. Un antrenor are la dispoziție 10 jucători. În câte moduri poate forma o echipă formată din 6 jucători?

14. Într-o clasă sunt 22 de elevi, dintre care 12 sunt fete. Determinați în câte moduri se poate alege un comitet reprezentativ al clasei format din 3 fete și 2 băieți.

15. Într-o clasă sunt 30 de elevi, dintre care 18 fete și 12 băieți. Alcătuim o echipă formată din 6 elevi care să conțină cel puțin 4 fete. În câte moduri putem forma echipa?

16. Aflați numărul diagonalelor unui poligon convex cu 10 laturi.

36. Găsiți termenul care nu conține x din dezvoltarea $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^9$.

37. a) Determinați coeficientul lui x^3 din dezvoltarea $(2+x)^4$.

b) Aflați rangul termenului care conține a^4 din dezvoltarea $\left(a^2+\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^9$, $a \neq 0$.

38. Fie dezvoltarea $\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x \neq 0$. Aflați termenul independent de x, știind că suma primilor trei coeficienți ai dezvoltării este egală cu 49.

39. Aflați numărul termenilor raționali din dezvoltarea $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)^{100}$.

40. Arătați că:

a) $(\sqrt{2}+1)^7-(\sqrt{2}-1)^7 \in \mathbb{Q}$;

b) $(2+\sqrt{2})^7-(2-\sqrt{2})^7 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

41. Calculați:

a) $C_{16}^0+C_{16}^2+\ldots+C_{16}^{16}$;

b) $C_{10}^0-C_{10}^2+C_{10}^4-C_{10}^6+C_{10}^8$;

c) $C_{2008}^0\cdot 5^{2008}-C_{2008}^1\cdot 5^{2007}\cdot 4+C_{2008}^2\cdot 5^{2006}\cdot 4^2-\ldots+C_{2008}^{2008}\cdot 4^{2008}$.

42*. a) Verificați dacă: $(1+k)C_n^k=C_n^k+nC_{n-1}^{k-1}$, $n, k \in \mathbb{N}^*$, $n \geq k$.

b) Demonstrați că: $1+2C_n^1+3C_n^2+\ldots+(n+1)C_n^n=2^{n-1}(n+2)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

43*. a) Arătați că $\dfrac{1}{k+1}C_n^k=\dfrac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$, $n \geq k$.

b) Demonstrați că: $C_n^0+\dfrac{1}{2}\cdot C_n^1+\dfrac{1}{3}C_n^2+\ldots+\dfrac{1}{n+1}C_n^n=\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

2.6. Matematici aplicate. Probabilități

1. Determinați ce procent din $a+b$ reprezintă numărul a, știind că a este egal cu 25% din b.

2. După o reducere de 20%, prețul unui produs este de 320 lei. Aflați prețul înainte de reducere.

3. Aflați prețul inițial al unui produs dacă, după o scumpire cu 15%, costă 460 lei.

4. Suma de 500 de lei a fost depusă la o bancă cu o rată a dobânzii de 1%. Calculați dobânda obținută după un an.

5. O sumă de 1000 lei a fost depusă la o bancă și, după un an, s-a obținut o dobândă de 8 lei. Calculați rata dobânzii.

2.8. Probleme recapitulative din materia claselor a IX-a – a X-a

Varianta 1

1. Arătați că modulul numărului complex $z = 5 - 12i$ este 13.

2. Determinați coordonatele punctelor de intersecție dintre parabola asociată funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 5x + 6$ și axa Ox.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 13$.

4. Câte numere de două cifre se divid cu 4 sau cu 5?

5. Scrieți ecuația dreptei ce trece prin $A(1, 2)$ și este paralelă cu dreapta d: $x + y + 1 = 0$.

6. Arătați că $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Varianta 2

1. Arătați că partea imaginară a numărului complex $z = \frac{1}{1+i}$ este $-\frac{1}{2}$.

2. Determinați punctele de pe graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$ ale căror coordonate au același modul.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt[3]{x+2} + 2 = 0$.

4. Câte submulțimi ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ conțin numărul 1?

5. Arătați că vectorii $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\vec{v} = -6\vec{i} - 4\vec{j}$ sunt coliniari.

6. În triunghiul ABC avem $AB = 4$, $AC = 6$ și $\sphericalangle A = 120°$. Arătați că $BC = 2\sqrt{19}$.

Varianta 3

1. Demonstrați că numărul $a = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{2}$ este întreg.

2. Demonstrați că funcția $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = x - \frac{1}{x}$ este impară.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $3^{x^2-4x} = \frac{1}{27}$.

4. Câte submulțimi cu trei elemente are mulțimea $\{0, 1, 2, \ldots, 10\}$?

5. Aflați distanța de la punctul $A(1, 3)$ la dreapta d: $x - 2y = 0$.

6. Dacă $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și $\sin a = \frac{5}{13}$, calculați tg a.

Clasa a XI-a

3.1. Permutări

1. Se consideră permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Calculați $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, σ^2, τ^{-2}.

2. Fie permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculați $(\sigma\tau)^{-1}$, σ^{-1}, τ^{-1} și arătați că $(\sigma\tau)^{-1} = \tau^{-1}\sigma^{-1}$.

3. Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_4$. Calculați σ^{2009}.

4. Se consideră permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Determinați $x \in S_3$, știind că $\sigma x \tau = e$.

5. Se consideră următoarele permutări de gradul patru:

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că $\sigma^2 = \tau^2 = e$, $\sigma^{-1} = \sigma$, $\tau^{-1} = \tau$ și $\sigma\tau \neq \tau\sigma$.

b) Determinați o permutare $\alpha \in S_4$, astfel încât $\alpha^{-1} \neq \alpha$.

6. Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$.

a) Calculați σ^3.

b) Rezolvați ecuația $\sigma^{2009} \cdot x = e$, $x \in S_3$.

7. Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$.

a) Calculați $\sigma\tau$ și $\tau\sigma$.

b) Rezolvați ecuația $\sigma x = \tau$.

8. Determinați semnul fiecăreia dintre următoarele permutări:

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

3.7. Șiruri

1. Studiați monotonia șirului $(x_n)_{n \geq 1}$ dacă:

a) $x_n = \dfrac{n+1}{n}$; b) $x_n = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + ... + \dfrac{1}{n^2}$;

c) $x_n = \dfrac{2^n}{n!}$; d) $x_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{n+n}$.

2. Studiați mărginirea șirului $(x_n)_{n \geq 1}$ al cărui termen general este:

a) $x_n = 1 + (-1)^n$; b) $x_n = \dfrac{2^n + 3^n}{5^n}$;

c) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + ... + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$; d) $x_n = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + ... + \dfrac{1}{n^2}$.

3. Arătați că următoarele șiruri sunt divergente:

a) $a_n = \dfrac{(-1)^n \cdot n}{n+2}$; b) $b_n = \sin \dfrac{n\pi}{2}$;

c) $c_n = n^2 - n$; d) $d_n = 2^n - 3^n$.

4. Calculați limita fiecăruia dintre următoarele șiruri, având termenul general:

a) $a_n = \dfrac{7n+3}{8n-2}$; b) $b_n = \dfrac{n^2 - n + 2}{n+3}$; c) $c_n = \dfrac{n^2+1}{(n+1)^3}$;

d) $d_n = \dfrac{(n-1)^2 - (n+1)^2}{2n+1}$; e) $e_n = \dfrac{1+2+...+n}{n^2+2}$; f) $f_n = \left(\dfrac{3n+1}{n+2}\right)^3$.

5. Calculați limita șirului cu termenul general a_n în fiecare dintre următoarele situații:

a) $a_n = \dfrac{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}{n}$; b) $a_n = \dfrac{3\sqrt{n}+5}{2\sqrt{n}+7}$; c) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+2}}{1+\sqrt[3]{n+1}}$;

d) $a_n = \sqrt{n^2+1} - 2n$; e) $a_n = \sqrt{3n+1} - \sqrt{2n+3}$; f) $a_n = \sqrt{n^2+1} - n\sqrt{n}$.

6. Calculați limita fiecăruia dintre următoarele șiruri având termenul general:

a) $a_n = \dfrac{\ln n + 3}{\ln n - 2}$; b) $b_n = \ln(n+1) - \ln n$; c) $c_n = \dfrac{\ln(e^n+1)}{n+1}$;

d) $d_n = \dfrac{\ln(4^n+1)}{\ln(2^n+3)}$; e) $l_n = \dfrac{1+\ln n^2}{2+\ln n^3}$; f) $f_n = n - \ln n$.